d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0\cdot 1 = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{\ln(X+1)}{X} = 1$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

c) T : $y = f'_d(0)\cdot x + f(0)$ d'où T : $y = x$.

d) Soit la fonction $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$; $t \mapsto \ln(1+t) - t$

• Etudions les variations de φ :

φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall t \in \mathbf{R}_+$,

$\varphi'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = \dfrac{-t}{1+t}$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbf{R}_+$, $\varphi'(t) \le 0$.

t	0		$+\infty$
$\varphi'(t)$	0	$-$	
$\varphi(t)$	0	↘	

D'après le tableau de variations on a 0 est un maximum absolu de φ

$\Rightarrow \forall t \in \mathbf{R}_+$, $\varphi(t) \le 0$ d'où $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $\ln(1+t) \le t$.

• Etudions le signe de $f(x) - x$:

$\forall t \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) - x = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} - x = \dfrac{\ln(x^2+1) - x^2}{x}$

Le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbf{R}_+^*$ est celui de $\text{Log}(x^2+1) - x^2$

Or $\ln(x^2+1) - x^2 = \varphi(x^2) < 0$ donc C_f est au dessous de T sur $\mathbf{R}_+$.

5°/a) On a : $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln(\alpha^2+1) = \dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} \Rightarrow f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$.

b) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, on a :

$f'(x) = \dfrac{\dfrac{2x}{x^2+1}\cdot x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \dfrac{\dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x}$

$\Rightarrow$ Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$